К. А. Крутова, С. В. Спирин, Е. С. Соколов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, sokolov.mmf@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С РАЗЛИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследуется влияние взаимного расположения и формы конечных элементов на численное решение в трехмерных задачах теории упругости. Авторам известна лишь одна публикация [1], в которой эмпирически, на основе численных экспериментов, изучается влияние взаимного расположения конечных элементов на точность численных решений. Аналитическое исследование методами конечных элементов представляется затруднительным, поскольку КЭ-анализ ограничивается исследованием одного элемента. Методами, описанными в [2, 3], были построены варианты сеточных аппроксимаций системы уравнений Ламе, которые соответствуют различным способам разбиения гексаэдральной базовой ячейки разностной сетки на конечные элементы (тетраэдры). Рассмотрены различные варианты разбиения параллелепипеда на 6 тетраэдров с симметричным и несимметричным способом разбиения, а также на 5 тетраэдров. Кроме того, рассмотрена ажурная схема [4, 5]. Ее отличие заключается в том, что из базовой ячейки оставляется лишь один центральный тетраэдр, являющийся расчетным элементом. Порядок аппроксимации исследовался традиционными методами теории разностных схем. Для сравнения приведен анализ аппроксимации схемы полилинейного

8-узлового КЭ.

Анализ аппроксимации. Рассматривались следующие типы схем и элементов: 8-узловой полилинейный, 8-узловой с неполным интегрированием (схема Уилкинса), 4-узловой линейный (с разбиением гексаэдра на 5 тетраэдров, с симметричным разбиением гексаэдра на 6 тетраэдров, с несимметричным разбиением гексаэдра на 6 тетраэдров, ажурная схема (базовый вариант), "суперажурная" схема). В первом (базовом) варианте ажурной схемы конечные элементы сохранялись в каждом гексаэдре, в "суперажурной" схеме дополнительно удалялись элементы в каждом втором гексаэдре в шахматном порядке, в результате чего получилась схема с сеткой минимальной связности (в каждом внутреннем узле сходилось по 4 элемента). Все схемы записывались в конечно-разностном виде, аналогичном системе уравнений Ламе

$$(\lambda+\mu)\begin{vmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{vmatrix} + \mu D_{\triangle}\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \rho D_{tt}\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где операторы D_{ij} аппроксимируют производные второго порядка соответственно по i-й и j-й координатам, D_{tt} аппроксимирует вторую производную по времени. Вид аппроксимирующих операторов зависит от варианта исследуемой схемы и может иметь либо первый, либо второй порядок точности. Схема полилинейного элемента имеет несколько дополнительных слагаемых второго и четвертого порядка малости по сравнению с (1). По результатам анализа сделаны следующие выводы. Схемы: полилинейного элемента, ажурная, с симметричным разбиением на 6 тетраэдров имеют 2-й порядок аппроксимации; остальные – 1-й порядок.

Численные результаты. Решена тестовая задача о колебании бруса квадратного сечения, закрепленного на торцах, нагруженного в центральной части внезапно приложенной равномерно распределенной поверхностной силой. Расчеты проводились на сетках с различным разбиением гексаэдральной базовой ячейки на тетраэдры, описанных выше. В результате численных экспериментов наилучшую сходимость показала ажурная схема, что можно объяснить наличием скрытых свойств, аналогично рассмотренным в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горельский В. А., Зелепугин С. А., Смолин А. Ю. *Исследование влияния дискретизации при расчете методом конечных элементов трехмерных задач высокоскоростного удара* // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. – 1997. – Т. 37. – № 6. – С. 742–750.

2. Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т. *Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом.* – Нижний Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та, 2000. – 118 с.

3. Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т. *Об индексной коммутативности численного дифференцирования* // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. – 1989. – Т. 29. – № 5. – С. 662–674.

4. Чекмарев Д. Т. *Численные схемы метода конечного элемента на “ажурных” сетках* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. математическое моделирование физических процессов. – 2009. – Вып. 2. – С. 49–54.

5. Чекмарев Д. Т., Жидков А. В., Зефиров С. В., Кастальская К. А., Спирин С. В. *Решение нестационарных трехмерных задач теории упругости на основе ажурной схемы*

МКЭ // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4(4). – С. 1480–1482.

М. И. Кузнецов, А. А. Шмелев

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,

kuznets-1349@yandex.ru, Shmelev-aa@list.ru

АЛГЕБРЫ $V7$ И $V8$

Компьютерная классификация простых алгебр Ли над $\mathbb{F}_2$ размерности меньше 10, проведенная Воэн-Ли [1], содержит 7-мерную алгебру Ли $V7$ и 8-мерную алгебру Ли $V8$, представленные как 7×7- и 8×8-матрицы, соответственно. Позднее Эйк [2], применяя новый компьютерный тест на изоморфизм алгебр Ли, показала, что $V7$ изоморфна неальтернированной гамильтоновой алгебре Ли $P(2:1,2)$ [3].

Авторы исследовали деформации полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g} = W(1:2)' \otimes \mathcal{O} + < 1 \otimes d >$ над алгебраически замкнутым полем характеристики два. Здесь $W(1:2)'$ – алгебра Цассенхауза, $\mathcal{O} = F[x]/(x^2)$, $d = d/dx$. Установлено, что $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 8$ и $V7$ вляется единственной простой алгеброй Ли, которую можно получить деформацией алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Кроме того, $V7$ содержит максимальные подалгебры, такие, что соответствующие фильтрации $V7$ имеют ассоциированные градуированные алгебры Ли, изоморфные $\mathfrak{g}$ с невырожденной и вырожденной градуировками в смысле Вейсфейлера.

Первый автор показал, что алгебра Ли $P(2:1,n)$ естественно возникает в классификации простых алгебр Ли с разрешимой максимальной подалгеброй над алгебраически замкнутым полем F характеристики p.